最適化　試験問題

2003. 1. 22

（**注意：** 問題および解答用紙はそれぞれ全部で２ページである．
問１と問２の解答には<u>別々の</u>解答用紙を用い，各々の
解答用紙に名前を書くこと．）

問 1． 次の２つの非線形計画問題 P_1 と P_2 を考える．

$$
\begin{array}{lll}
P_1: & \text{目的関数：} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \ \rightarrow \ \text{最大} \\
 & \text{制約条件：} & \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \leq 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
P_2: & \text{目的関数：} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \ \rightarrow \ \text{最小} \\
 & \text{制約条件：} & \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \leq 1
\end{array}
$$

ただし，$\boldsymbol{c}$ は n 次元定数ベクトル，$\boldsymbol{A}$ は $n \times n$ 定数行列，$\boldsymbol{x}$ は n 次元変数ベクトルである．さらに，行列 $\boldsymbol{A}$ は正定値対称であり，$\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ であると仮定する．

以下の問 (a) – (c) に答えよ．

(a) 問題 P_1 の最適解を求めよ．

(b) 問題 P_2 の最適解を求めよ．

(c) 行列 $\boldsymbol{A}$ は対角成分が $a_1 > 0, \ldots, a_n > 0$ であるような対角行列であるとする．いま，ベクトル $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n)^\top$ の各成分を条件 $c_1^2 + \cdots + c_n^2 = 1$ を満たす範囲で動かすことを考える（行列 $\boldsymbol{A}$ の各成分は固定する）．そのとき，問題 P_1 の目的関数の最大値と問題 P_2 の目的関数の最小値の差が最も小さくなるような $\boldsymbol{c}$ の値と，差が最も大きくなるような $\boldsymbol{c}$ の値を求めよ．

(問２は次ページ)

問 2. 0–1 ナップサック問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{目的関数} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i z_i \to \text{最大} \\
\text{制約条件} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i z_i \leqq b \\
 & z_i \in \{0,1\},\ i = 1,2,\ldots,n
\end{array}
$$

を考える．ただし, $c_1/a_1 \geqq c_2/a_2 \geqq \cdots \geqq c_n/a_n$ かつ $0 < a_i \leqq b$ $(\forall i)$ であり，さらにある整数 $s \in \{1,\ldots,n\}$ に対して $\sum_{i=1}^{s-1} a_i \leqq b < \sum_{i=1}^{s} a_i$ が成り立つと仮定する．この問題の最適値を OPT と記す.

(ア) まず, 要素 $i = 1,2,\ldots,s-1$ をナップサックに詰める (すなわち $z_1 = z_2 = \cdots = z_{s-1} = 1,\ z_s = z_{s+1} = \cdots = z_n = 0$) 欲張り法（講義で説明したものとは若干異なる）を考え, 得られる解の目的関数値を $A_1 = \sum_{i=1}^{s-1} c_i$ とおく．このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $A_1/OPT \leqq \varepsilon$ となる問題例が存在する, すなわち近似度は限りなく 0 に近づくことを示せ．（ヒント: $n = 2$ の簡単な例が存在する．c_s と a_s がともに極端に大きい場合を考えればよい.）

(イ) 上の欲張り法を改良し, 上記の近似解と, 要素 s のみをナップサックに詰める (すなわち $z_s = 1,\ z_i = 0\ (i \neq s)$) 解の二通りを試して, よい方を採用するという方法を考える．この方法による解の目的関数値を A_2 とすると, $A_2 = \max\{A_1, c_s\}$ である．この方法の近似度が 1/2 以上であること, すなわち任意の問題例に対して $A_2/OPT \geqq 1/2$ が成り立つことを示せ．なお, $\bar{b} = b - \sum_{i=1}^{s-1} a_i$ に対して, $UB = \sum_{i=1}^{s-1} c_i + c_s\bar{b}/a_s$ は最適値の上界を与える, すなわち $OPT \leqq UB$ が成り立つ．この事実は証明に利用してよい.

(ウ) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $A_2/OPT \leqq 1/2 + \varepsilon$ となるような問題例が存在することを示せ．（ヒント: $n = 3$ の簡単な例が存在する.）

以上