

離散数学及び演習 C クラス 期末試験問題

2010年7月29日

問 1. 二つの集合 A と B に対し, $(A\Delta B) \cap B = (A \cup B) \cap ((A^c \cup B^c) \setminus A)$ が正しいか否かを答え, その理由を簡潔に説明せよ. (厳密な証明は不要. オイラー図 (ヴェン図) などを用いた直感的な説明でよい. なお, Δ は対称差, \setminus は差集合を表す.)

問 2. 正整数の集合上の 2 項関係 R を「 $xRy \iff x$ は y の約数」と定義する.

(a) R は半順序関係であるか否かをその理由とともに述べよ.

(b) $X = \{1, 2, 3, 4, 6, 24, 36\}$ に対して半順序集合 (X, R) をハッセ図で示せ.

(c) 半順序集合 (X, R) における $A = \{3, 4\}$ の上界と下界をそれぞれ求めよ. 複数ある場合は全て答えること. また, 上限と下限が存在する場合はそれらも示せ (存在しない場合はその旨明記すること).

問 3. 2010 と 3765 の最小公倍数と最大公約数を求めよ. 計算過程を詳しく示すこと.

問 4. 4^{4444} を 41 で割った余りを求めよ. (ヒント: 41 が素数であることを利用してよい.)

問 5. n 人があみだくじによってプレゼント交換をする.

(a) 相異なる交換の仕方は何通りあるか.

(b) $n = 5$ のとき, だれも自分のプレゼントに当たらない交換の仕方は何通りあるか. 計算過程を詳しく示すこと.

問 6. (G, Δ) を群, a を G の任意の元とし, G の各元 x に $x\Delta a$ を対応させる関数を f_a と記す. $f_a: G \rightarrow G$ が全射であるか否か, 単射であるか否かを, それぞれ理由とともに示せ.

問 7. 実数の対 (a, b) で $a \neq 0$ を満たすもの全ての集合を G とし, G 上の演算 Δ を

$$(a, b)\Delta(c, d) = (ac, bc + d)$$

と定義する. このとき (G, Δ) は群となるか否かを答えよ. また, 群となる場合はその証明を与え, そうでない場合は理由を述べよ.

問 8. 100 個の正整数を任意に選ぶと, その中に差が 99 の倍数であるような対が存在することを示せ.